छात्रों के लिए निर्देश

1. इस प्रश्न-पत्र के मिलते ही ऊपर दिए गए निर्धारित स्थान पर अपना अनुक्रमांक लिखिए।

2. साधारण कैलकुलेटर के उपयोग की अनुमति है।

3. दिव्यांग श्रेणी के लिए निर्दिष्ट प्रश्नों को केवल दिव्यांग श्रेणी के लोगों द्वारा ही हल किया जाना चाहिए, सामान्य श्रेणी के लोगों द्वारा नहीं।

4. कोई भी नौ प्रश्न हल करें।

5. सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

6. इस प्रश्न-पत्र का उत्तर अंग्रेजी या हिंदी किसी एक भाषा में दीजिए, लेकिन सभी उत्तरों का माध्यम एक ही होना चाहिए।

1. Maximize Profits : $\pi = 64x - 2x^2 + 96y - 4y^2 - 13$ subject to the production constraint: $x + y \leq 36$

लाभ अधिकतमकरण: $\pi = 64x - 2x^2 + 96y - 4y^2 - 13$ उत्पादन बाधा: $x + y \leq 36$ के अधीन होते हैं।

2. Suppose that an economy's investment flow every year is $I(t) = 10t^{\frac{1}{2}}$. Let $K(t)$ represent the current stock of capital at time t. If $K(0) = K_0$ and there is

no depreciation, find the level of capital stock five years from now. What happens to the capital stock after five years if investment flow is the same as before and capital stock depreciates every year by 500?

मान लीजिए कि किसी अर्थव्यवस्था का निवेश प्रवाह प्रति वर्ष $I(t) = 10t^{\frac{1}{2}}$ है। मान लीजिए $K(t)$ समय t पर पूँजी के वर्तमान स्टॉक को दर्शाता हैं। यदि $K(0) = K_0$ है और कोई भी मूल्यह्रास नहीं होता है, तो अब से पाँच वर्ष बाद पूँजी स्टॉक का स्तर ज्ञात कीजिए। पांच वर्षों के बाद पूंजी स्टॉक का क्या होगा यदि निवेश प्रवाह पहले के समान है और पूंजी स्टॉक प्रति वर्ष 500 से कम हो जाता है?

3. (a) Show that $u_1 = e^{2t}$ and $u_2 = te^{2t}$ both solve the $\ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = 0$. What is the general solution?

(b) Find the general solutions of the following differential equation and determine if it is stable or not :

$$\dot{y} + \frac{1}{2}y = \frac{3}{4}$$

(क) यह दर्शाएं कि $u_1 = e^{2t}$ और $u_2 = te^{2t}$ दोनों $\ddot{x} - 4\dot{x} + 4x = 0$ को हल करते हैं। इसका सामान्य हल क्या है?

(ख) निम्नलिखित अवकल समीकरण के सामान्य हल खोजिए और ज्ञात कीजिए कि यह स्थिर है या नहीं :

$$\dot{y} + \frac{1}{2}y = \frac{3}{4}$$

4. Two firms share the market for a product. Firm 1's output is x; firm 2's output is y. The two reaction functions of the firms are

$$x_{t+1} + \beta y_t = b ; \qquad \beta \neq 1$$

$$y_{t+1} + \alpha x_t = b ; \qquad \alpha \neq 1$$

Derive and solve the second-order difference equation for x implied by the above model. Also, discuss the conditions under which the steady state is stable.

दो फर्म एक उत्पाद के लिए बाजार साझा करती हैं। फर्म 1 का आउटपुट x है; फर्म 2 का आउटपुट y है। फर्मों के दो प्रतिक्रिया फलन हैं

$$x_{t+1} + \beta y_t = b ; \qquad \beta \neq 1$$

$$y_{t+1} + \alpha x_t = b ; \qquad \alpha \neq 1$$

उपरोक्त मॉडल द्वारा निहित x के लिए दूसरे क्रम के अवकल समीकरण को प्राप्त और हल कीजिए। इसके अलावा, उन स्थितियों पर चर्चा कीजिए जिनके तहत स्थायी अवस्था स्थिर है।

5. Solve the consumer demand problem

max $x^a + y^a$ subject to $px + qy = m$ where $a \in (0,1)$ and $x > 0$, $y > 0$

Also, check the second order sufficient conditions.

उपभोक्ता मांग समस्या का समाधान कीजिए

max $x^a + y^a$, $px + qy = m$ के अधीन है जहां $a \in (0,1)$ और $x > 0$, $y > 0$ हैं

इसके अलावा, दूसरे क्रम की सत्यता स्थितियों की जांच कीजिए।

6. A central planner controls an economy with two sectors, producing outputs y_1 and y_2. Prices of the goods are $p_1 = 1$ and $p_2 = 2$ respectively. The planner wishes to maximise the national output at these given prices. Labour is the only input and it is available in a fixed total amount $L_0 = 1000$. The production functions in the two sectors are

$$y_1 = 100L_1^{\frac{1}{2}} \text{ and } y_2 = 50L_2^{\frac{1}{2}}$$

(a) Calculate the optimal labour allocations, outputs and the shadow wage rate.

(b) Write the value function and Find $\frac{\partial Y^*}{\partial p_1}$, $\frac{\partial Y^*}{\partial p_2}$ and, $\frac{\partial Y^*}{\partial L_0}$ using the envelope theorem.

एक केंद्रीय योजनाकार दो क्षेत्रों के साथ एक अर्थव्यवस्था को नियंत्रित करता है, वह y_1 और y_2 आउटपुट का उत्पादन करता है। वस्तुओं की कीमतें क्रमशः $p_1 = 1$ और $p_2 = 2$ हैं। योजनाकार इन दी गई कीमतों पर राष्ट्रीय उत्पादन को अधिकतम करना चाहता है। श्रम एकमात्र इनपुट है और यह एक निश्चित कुल मात्रा $L_0 = 1000$ में उपलब्ध है। दोनों क्षेत्रों के उत्पादन फलन हैं

$$y_1 = 100L_1^{\frac{1}{2}} \text{ and } y_2 = 50L_2^{\frac{1}{2}}$$

(क) इष्टतम श्रम आवंटन, आउटपुट और कल्पित मजदूरी दर की गणना कीजिए।

(ख) मान फलन लिखिए और अन्वालोप प्रमेय का उपयोग करके $\frac{\partial Y^*}{\partial p_1}$, $\frac{\partial Y^*}{\partial p_2}$ और $\frac{\partial Y^*}{\partial L_0}$ ज्ञात कीजिए।

7. A sports student is trying to decide on the lowest-cost diet. Following is the data for two types of eatables (sprouts and Banana) and three types of nutrients (Calcium, protein and Vitamin)

	Nutritional Content (mg/ unit)			Cost (Rs Per Unit)
	Calcium	Protein	Vitamin	
Sprouts	5	4	2	6
Banana	7	2	1	3.5

The requirement per day of calcium, proteins and vitamins is 8, 15 and 3 respectively. The problem is to find how much of each eatable to consume per day to get the required amount per day of each nutrient at a minimal cost.

(a) Write the linear programming problem and its dual and solve them.

(b) If the sports coach increases the calcium requirement from 8 to 9 and reduces the protein requirement from 15 to 14, then what will be the change in the cost?

Alternative Question for the PWD Candidates

(a) Write the dual of the following Problem

$$\max\ x_1 + x_2 + x_3 \text{ subject to } \begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 4 \\ x_3 \le 6 \end{cases}.$$

(b) What are the solutions to this problem and the dual? What happens to the primal criterion function if the constraints in the primal change to

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 4.1 \\ x_3 \le 5.9 \end{cases} ?$$

एक खेल छात्र सबसे कम लागत वाले आहार पर निर्णय लेने की कोशिश कर रहा है। दो प्रकार के खाद्य पदार्थों (अंकुरित अनाज और केला) और तीन प्रकार के पोषक तत्वों (कैल्शियम, प्रोटीन और विटामिन) के आंकड़े निम्नलिखित हैं

	पोषक तत्व (mg/ unit)			लागत (प्रति यूनिट रुपये)
	कैल्शियम	प्रोटीन	विटामिन	
अंकुरित अनाज	5	4	2	6
केला	7	2	1	3.5

कैल्शियम, प्रोटीन और विटामिन की प्रति दिन आवश्यकता क्रमशः 8, 15 और 3 है। समस्या यह पता लगाना है कि न्यूनतम लागत पर प्रत्येक पोषक तत्व की प्रति दिन आवश्यक मात्रा प्राप्त करने के लिए प्रति दिन प्रत्येक आहार का कितना उपभोग करना है।

(क) रैखिक प्रोग्रामिंग समस्या और उसकी दोहरी समस्या को लिखिए और उन्हें हल कीजिए।

(ख) यदि स्पोर्ट्स कोच कैल्शियम की आवश्यकता को 8 से बढ़ाकर 9 कर देता है और प्रोटीन की आवश्यकता को 15 से घटाकर 14 कर देता है, तो लागत में क्या बदलाव होगा?

नि:शक्तजन (PWD) अभ्यर्थियों के लिए वैकल्पिक प्रश्न

(क) निम्नलिखित समस्या का दोहराव (dual) लिखिए

$$\max\ x_1 + x_2 + x_3 \text{ subject to } \begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 4 \\ x_3 \le 6 \end{cases} \text{ के अधीन}$$

(ख) इस समस्या और दोहरे का समाधान क्या है? यदि प्राइमल में

बाधाएं $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 4.1 \\ x_3 \le 5.9 \end{cases}$ में बदल जाती हैं तो प्राइमल मानदंड

फलन का क्या होता है?

8. Suppose that a fish population grows according to the function, $g(y)=2y\left(1-\frac{y}{2}\right)$ where y is the stock of fish. If the fish population is harvested by the fishing industry at a constant rate of ¾, write down the equation for the rate of change in the stock of fish. Also, draw the phase diagram to show the change in the stock of the population as a function of the stock of fish and discuss the nature of the steady states.

Alternative Question for the PWD Candidates

Solve the differential equation for y(t) where

$$\frac{dy}{dt}=ty+2-2t-y$$

Also, find the integral curve through the point (0,1).

मान लीजिए कि मछली की आबादी फलन $g(y)=2y\left(1-\frac{y}{2}\right)$ के अनुसार बढ़ती है, जहाँ y मछली का स्टॉक है। यदि मत्स्य उद्योग द्वारा मछली की जनसंख्या को ¾, की स्थिर दर से पकड़ा जाता है, तो मछली के स्टॉक में परिवर्तन की दर के लिए समीकरण लिखिए। इसके अलावा, मछली के स्टॉक के एक फलन के रूप में जनसंख्या के स्टॉक

में परिवर्तन को दिखाने के लिए चरण आरेख बनाएं और स्थिर स्थितियों की प्रकृति पर चर्चा कीजिए।

नि:शक्तजन (PWD) अभ्यर्थियों के लिए वैकल्पिक प्रश्न

y(t) के लिए अवकल समीकरण को हल कीजिए जहां

$$\frac{dy}{dt}=ty+2-2t-y$$

साथ ही बिंदु (0,1) के माध्यम से समाकल वक्र ज्ञात कीजिए।

9. An electric company is setting up a power plant and it has to plan its capacity. The demand for power in period 1 and period 2 are q_1 and q_2 respectively. Assume that a regulatory authority fixes the corresponding prices for period 1 and period 2 to be Rs. 1 per unit and Rs. 3 per unit respectively. The total operating cost over the two periods is $q_1^2 + q_2^2$. The cost of maintaining output capacity k cost is k^2 which is paid only once and is used in both periods.

(a) Write the producer's total profit function with all constraints.

(b) Solve the producer's problem by writing Kuhn tucker conditions for maximising producer's tota profit and find the optimal output quantities q_1 and q_2, and capacity level k.

एक विद्युत कंपनी एक विद्युत संयंत्र स्थापित कर रही है और उसे अपनी क्षमता की योजना बनानी होगी। अवधि 1 और अवधि 2 में विद्युत की माँग क्रमशः q_1 और q_2 है। मान लीजिए कि एक नियामक प्राधिकरण अवधि 1 और अवधि 2 के लिए संबंधित मूल्य क्रमशः 1 रुपये प्रति यूनिट और 3 रुपये प्रति यूनिट तय करता है। दो अवधियों में कुल परिचालन लागत $q_1^2 + q_2^2$ है। आउटपुट क्षमता k लागत को बनाए रखने की लागत k^2 है जिसका भुगतान केवल एक बार किया जाता है और दोनों अवधियों में उपयोग किया जाता है।

(क) उत्पादक के कुल लाभ फलन को सभी बाधाओं के साथ लिखिए।

(ख) उत्पादक के कुल लाभ को अधिकतम करने के लिए कुह्न-टकर शर्तों को लिखकर उत्पादक की समस्या का समाधान कीजिए और इष्टतम उत्पादन मात्रा q_1 और q_2 और क्षमता स्तर k ज्ञात कीजिए।

10. Consider the LP problem

$$x + y \leq 3$$

$$2x + y - z \leq 1$$

$$\max\ 3x + 2y \text{ subject to } \begin{cases} x + 2y - z \leq 1 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ z \geq 0 \end{cases}$$

(a) Assuming z to be a fixed number, solve the problem for $z = 0$ and $z = 4$.

(b) Solve the problem for any fixed value of $z \in [0, \infty)$. The maximal value of the criterion function $3x + 2y$ becomes a function of z. Find this function and maximise it.

Alternative Question for the PWD Candidates

Consider the general LP problem

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n \leq b_2$$

$$\max\ c_1x_1 + c_2x_2 + + c_nx_n$$

subject to $\left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right.$ [1]

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots + a_{mn}x_n \leq b_n$$

with non-negativity constraints $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$.

(a) Formulate the dual of the above problem.

(b) If $(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$ is feasible in the primal problem [1] and $(u_1, u_2, \ldots\ldots, u_m)$ is feasible in the dual problem [2], then show that

$$b_1u_1 + b_2u_2 + \ldots\ldots + b_mu_m \geq c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots\ldots + c_nx_n$$

LP समस्या पर विचार कीजिए

$$x + y \leq 3$$

$$2x + y - z \leq 1$$

$\max 3x + 2y,$ $\left\{ \begin{array}{l} x + 2y - z \leq 1 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ z \geq 0 \end{array} \right.$ के अधीन है

(क) z को एक निश्चित संख्या मानते हुए, $z = 0$ और $z = 4$ के लिए प्रश्न को हल कीजिए।

(ख) $z \in [0, \infty)$ के किसी भी निश्चित मान के लिए प्रश्न को हल कीजिए। मानदंड फलन $3x + 2y$ का अधिकतम मान z का फलन बन जाता है। इस फलन को ज्ञात कीजिए और इसे अधिकतम बनाएं।

निःशक्तजन (PWD) अभ्यर्थियों के लिए वैकल्पिक प्रश्न

सामान्य LP समस्या पर विचार कीजिए

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n \leq b_2$$

$$\max c_1x_1 + c_2x_2 + + c_nx_n$$

subject to $\left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right.$ [1]

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots\ldots + a_{mn}x_n \leq b_m$$

गैर-नकारात्मकता बाधाओं $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$ के साथ।

(क) उपरोक्त समस्या के दोहराव (dual) को तैयार कीजिए।

(ख) यदि $(x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$ प्राइमल समस्या [1] में संभव है और $(u_1, u_2, \ldots\ldots, u_m)$ दोहराव (dual) समस्या [2] में संभव है, तो यह दर्शाएं

$$b_1u_1 + b_2u_2 + \ldots\ldots + b_mu_m \geq c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots\ldots + c_nx_n$$

Solutions key Advanced MME (2024-25) NEW 1767 (1)

2272102303
Nitin Khandelwal (9891970849), Rohit, SRCC (8383982028), Ankur, Ramjas College (8950467497)

SET 1

Q.1 Lagrangean fn, $\mathcal{L}(x,y) = 64x - 2x^2 + 96y - 4y^2 - 13 + \lambda(36 - x - y)$

3 $\begin{cases} \mathcal{L}_x = 64 - 4x - \lambda = 0 \quad -(1) \\ \mathcal{L}_y = 96 - 8y - \lambda = 0 \quad -(2) \\ \text{C.S.} \quad \lambda(36 - x - y) = 0 \quad \text{or} \quad \lambda \geq 0 \ (= 0 \text{ if } x+y<36) \quad -(3) \end{cases}$

NEW (AMME)

Case I:- $\lambda > 0$ & $\therefore x + y = 36$

3 From (1) & (2) $64 - 4x = 96 - 8y$

$4x - 8y + 96 - 64 = 0$.

$4x - 8y = -32$

$x - 2y = -8 \Rightarrow x^* = \frac{64}{3}, y^* = \frac{44}{3}$ & $\lambda = \frac{-64}{3}$

violation, so ruled out

Case II:- $x + y < 36$ and hence $\lambda = 0$. } 3 + 1

$\Rightarrow x = 16$ & $y = 12$ ↳ this is the unique solution } 4 marks

This is the optimal pt. as by extreme value thm, the function does have an extreme pt. } 2 marks

Q.2 $I(t) = 10t^{1/2}$, $k(0) = k_0$.

2 Without depreciation, level of k stock 5 yrs. from now

$= k_0 + \int_0^5 10t^{1/2}\,dt$

$= k_0 + 10 \left| \frac{t^{3/2}}{3/2} \right|_0^5$ } 5

$= k_0 + \frac{10\sqrt{5}}{3}$.

Alternatively, the prob. can be solved using indefinite integration.

With depreciation, level of k stock 5 yrs from now

$= k_0 + \int_0^5 (10t^{1/2} - 5w)\,dt$ } 5

Reduct 1 mark for calculation error

$= k_0 + \left| \frac{10t^{3/2}}{3/2} - 500t \right|_0^5$

$= k_0 + 10 \cdot 5^{3/2} \cdot \frac{2}{3} - 2500$. Ans 2

3(a) 5 { Direct verification. $Ae^{2t} + Bte^{2t} = 0$ is the general soln of the given differential eqn.

(b) 5 { General soln of $\dot{y} + \frac{1}{2}y = \frac{3}{4}$ is $y = Ce^{-\frac{1}{2}t} + 3/2$
$y = 3/2$ is the eqbm state which is stable as $a = \frac{1}{2} > 0$.

Q.4. 4 { II-order diff^{al} eqn in x is $x_{t+2} - \alpha\beta x_t = b - \beta b$.
4 { The general soln to the eqn is (For α & β have same sign)
$x_t = c_1(\sqrt{\alpha\beta})^t + c_2(-\sqrt{\alpha\beta})^t + \frac{b(1-\beta)}{1-\alpha\beta}$
2 { Cond^n for stability is $|\alpha\beta| < 1$. for $\alpha\beta \neq 1$.

Q.5. Lagrangean fn :- $\mathcal{L} = f(x,y) - \lambda(g(x,y) - c)$
$\mathcal{L}(x,y) = x^a + y^a - \lambda(px + qy - m)$.
6 { $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = ax^{a-1} - \lambda p = 0$ —(1)
$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = ay^{a-1} - \lambda q = 0$ —(2)
$px + qy = m$ — (3)
$\Rightarrow \left(x^* = \frac{m p^{\frac{1}{a-1}}}{p^{\frac{a}{a-1}} + q^{\frac{a}{a-1}}} \text{ & } y^* = \frac{m q^{\frac{1}{a-1}}}{p^{\frac{a}{a-1}} + q^{\frac{a}{a-1}}} \right)$.

3+1 { $H_B = \begin{vmatrix} 0 & p & q \\ p & a(a-1)x^{a-2} & 0 \\ q & 0 & a(a-1)y^{a-2} \end{vmatrix} = -a(a-1)\left[p^2 y^{a-2} + q^2 x^{a-2}\right]$
1 mark for cond^n on a.
$> 0 \because 0 < a < 1$.
Hence, (x^*, y^*) found above does maximize $U(x,y)$ st. budget

(a) Problem is to max. $Y = P_1 y_1 + P_2 y_2$

2 $\begin{cases} = P_1 100 L_1^{1/2} + P_2 50 L_2^{1/2} \\ \text{s.t. } L_1 + L_2 \leq L_0 = 100 \end{cases}$

Lagrangean fn is

Kuhn-Tucker conds

$$\mathcal{L}(L_1, L_2) = P_1 100 L_1^{1/2} + P_2 50 L_2^{1/2} - \lambda(L_1 + L_2 - L_0)$$

$$= 100 L_1^{1/2} + 100 L_2^{1/2} - \lambda(L_1 + L_2 - 100)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L_1} = 50 L_1^{-1/2} - \lambda = 0 \quad \text{—(1)}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L_2} = 50 L_2^{-1/2} - \lambda = 0 \quad \text{—(2)}$$

$\lambda \geq 0$ (or) $L_1 + L_2 \leq 100$) — (3)

Case I: $L_1 + L_2 < 100$, then $\lambda = 0$

$\Rightarrow \frac{50}{L^{1/2}} = 0$, not possible.

Hence, $\lambda > 0$.

and $\therefore L_1 + L_2 = 100$.

$\Rightarrow L_1 = L_2$ from (1) & (2),

$\Rightarrow L_1^* = L_2^* = 50$ from (3)

Thus, optimal outputs, $y_1^* = 100 L_1^{1/2} = 100\sqrt{5}$

$y_2^* = 50 L_2^{1/2} = 50\sqrt{5}$.

3 Thus, $Y^* = 100\sqrt{5} + 100\sqrt{5} = 200\sqrt{5}$.

Shadow wage rate $= \lambda^* = \frac{50}{\sqrt{L_1^*}} = \frac{50}{\sqrt{50}}$

$= \sqrt{5}$.

(b) for value fn :-

$$\mathcal{L}(L_1, L_2) = P_1 100 L_1^{1/2} + P_2 50 L_2^{1/2} - \lambda(L_1 + L_2 - L_0)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L_1} = 50 P_1 L_1^{-1/2} - \lambda = 0 \quad \text{—(1)}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial L_2} = 25 P_2 L_2^{-1/2} - \lambda = 0 \quad \text{—(2)}$$

$$L_1 + L_2 = L_0 \quad \text{—(3)}$$

Solving ①, ② & ③ simultaneously, we get

$$L^* = \frac{4L_0P_1^2}{4P_1^2+P_2^2} \quad \& \quad L_2^* = \frac{L_0P_2^2}{4P_1^2+P_2^2}$$

∴ Optimal value fⁿ, $y^* = P_1 100 L_1^{*1/2} + P_2 50 L_2^{*1/2}$

$$= 50\sqrt{\frac{L_0}{4P_1^2+P_2^2}}\left(4P_1P_2\right)$$

$$\text{or } y^* = 200 P_1P_2 \sqrt{\frac{L_0}{4P_1^2+P_2^2}}. \quad \underline{2}$$

Using Envelope Theorem,

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial y^*}{\partial P_1} &= \frac{\partial \lambda}{\partial P_1} = 100 L_1^{*1/2} = y_1^* = 1000\sqrt{5}, \\ \frac{\partial y^*}{\partial P_2} &= \frac{\partial \lambda}{\partial P_2} = 50 L_2^{*1/2} = y_2^* = 50\sqrt{5}. \\ \frac{\partial y^*}{\partial L_0} &= \frac{\partial \lambda}{\partial L_0} = \lambda^* = \sqrt{5}. \end{aligned}\right\} \underline{3}$$

Q.7. Problem (Primal) is to

min. $6x_1 + 3.5x_2$ s.t.

$5x_1 + 7x_2 \geq 8$

$4x_1 + 2x_2 \geq 15$

$2x_1 + x_2 \geq 3$

$x_1, x_2 \geq 0.$

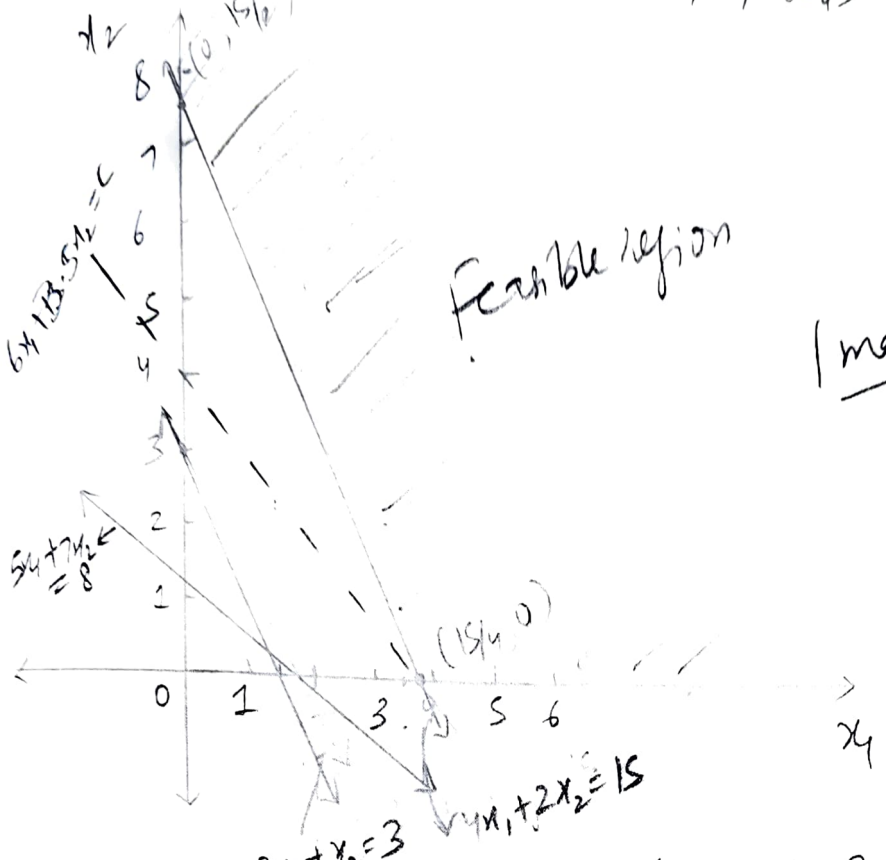
Dual Problem is to

max $8y_1 + 15y_2 + 3y_3$ s.t. $5y_1 + 4y_2 + 2y_3 \leq 6$

$7y_1 + 2y_2 + y_3 \leq 3.5$

$y_1, y_2, y_3 \geq 0.$

Solution to Primal Problem (Graphical) (5)



Given the extreme pts. $(0, 15/2)$ & $(15/4, 0)$, criterion fn is minimized at $(\frac{15}{4}, 0)$. – 3

Dual Problem is solved using CS cond^{n}s.

$\because x_1^* = \frac{15}{4} > 0$, C–

$$5y_1^* + 4y_2^* + 2y_3^* = 6. \quad \text{— (1)}$$

Also, at the primal soln, $(\frac{15}{4}, 0)$

$$4x_1^* + 2x_2^* = 15 \text{ but}$$

$$5x_1^* + 7x_2^* > 8$$

$$\& \; 2x_1^* + x_2^* > 3,$$

$$\therefore y_1^* = y_3^* = 0. \quad \text{—(2)}$$

Thus from (1) & (2), we have

$$4y_2^* = 6 \Rightarrow y_2^* = \frac{3}{2}. \quad 4$$

Thus, $(0, 3/2, 0)$ is soln to dual.

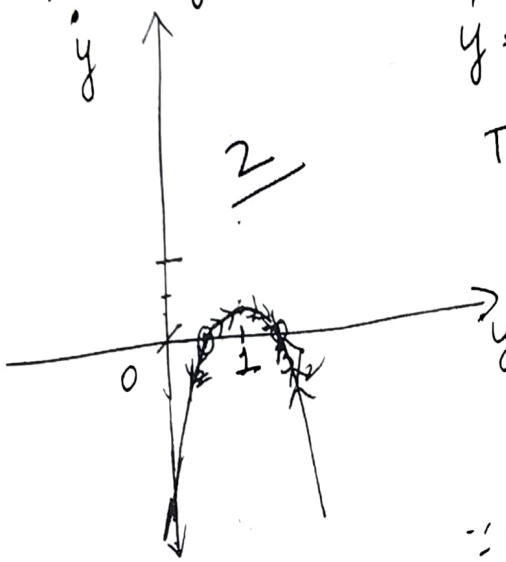
(b) change in cost, $\Delta z^* = y_1^* \Delta b_1 + y_2^* \Delta b_2 + y_3^* \Delta b_3$ 2

$= 0 \times 1 + \frac{3}{2} \times (-1) + 0 \times 0$

The eqn for the rate of change of fish is

$$\dot{y} = g(y) - 3/4$$
$$\dot{y} = 2y(1 - y/2) - 3/4 \quad \Big\} 4$$
$$\dot{y} = -(y-1)^2 + \frac{1}{4}.$$

Phase diagram



$\dot{y} = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$ or $\frac{3}{2}$, 2

Two equilibrium or steady states.

$\because \frac{d\dot{y}}{dy} = -1 < 0$ at $y = \frac{3}{2}$,

$\therefore y = \frac{3}{2}$ is stable steady state. 1

$\because \frac{d\dot{y}}{dy} = 1 > 0$ at $y = \frac{1}{2}$, 1

$\therefore y = \frac{1}{2}$ is unstable steady state.

Q.9. Producer's total profit is

$\pi(q_1, q_2) = q_1 + 3q_2 - q_1^2 - q_2^2 - k^2$

and problem is to

max. $\pi = q_1 + 3q_2 - q_1^2 - q_2^2 - k^2$ s.t.

2 $\Big\{$ $\Big\{$ $q_1 \le k$, $q_2 \le k$, $q_1, q_2, k \ge 0$ $\Big\}$.

$$\mathcal{L}(q_1, q_2, k) = q_1 + 3q_2 - q_1^2 - q_2^2 - k^2 - \lambda_1(q_1 - k) - \lambda_2(q_2 - k)$$

KT condns

2 $\Big\{$
$1 - 2q_1 - \lambda_1 \le 0$ ($= 0$ if $q_1 > 0$) — (1)
$3 - 2q_2 - \lambda_2 \le 0$ ($= 0$ if $q_2 > 0$) — (2)
$-2k + \lambda_1 + \lambda_2 \le 0$ ($= 0$ if $k > 0$) — (3)
$\lambda_1 \ge 0$ ($= 0$ if $q_1 < k$) — (4)

$\lambda_2 \geq 0$ ($=0$ if $q_2 < k$) — (5)

$k = 0$ leads to contradiction to eq(3).

Hence $k > 0$.

Thus, $-2k + \lambda_1 + \lambda_2 = 0$.

Case I :- $q_1 < k$ & $q_2 < k \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

$\Rightarrow k = 0$ from (3) which is contradictory as $k > 0$.

Case II :- $q_1 = k$ & $q_2 < k$

$\lambda_1 \geq 0$ & $\lambda_2 = 0$

Then from eqn(1) $q_1 = k > 0$,

$\therefore \lambda_1 = 1 - 2k$.

and from (2) & (3), $q_2 = \frac{3}{2}$, $k = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow$ contradicts capacity constraint $q_2 < k$.

Hence ruled out

One can give 1 mark per case discussed in case final answer not reached.

Case III :- $q_1 < k$ & $q_2 = k$

$\lambda_1 = 0$ & $\lambda_2 \geq 0$

From (1), (2) & (3)

$q_1^* = \frac{1}{2}$, $k^* = \frac{3}{4}$, $q_2^* = \frac{3}{4}$,

$\lambda_1 = 0$ & $\lambda_2 = \frac{3}{2}$.

$\rightarrow$ one possible soln

Case IV

$q_1 = k$ and $q_2 = k$

$\lambda_1 \geq 0$ & $\lambda_2 \geq 0$

$\therefore k > 0$ & q_1 & $q_2 > 0$, Hence

from (1), (2) & (3)

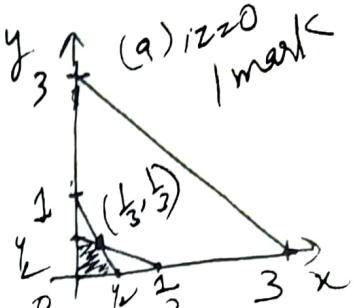
$k = q_1 = q_2 = \frac{2}{3}$.

but $\lambda_1 = 1 - 2 \times \frac{2}{3} = -\frac{1}{3} < 0$, contradictory.

Hence ruled out

Thus, out of all four cases,
$(q^*, k^*, k^*) = (\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4})$ is the only possible optimal soln. — 5

8.10. Max $3x+2y$ s.t. $\begin{cases} x+y \le 3 \\ x+y-z \le 1 \\ x+2y-z \le 1 \end{cases}$



(a) $z=0$ (1 mark)

Problem is to max $3x+2y$ s.t. $\begin{cases} x+y \le 3 \\ x+y \le 1 \\ x+2y \le 1, \end{cases}$ 1

solving graphically, the soln is $(x^*, y^*) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, at the intersection of 2nd & 3rd constraint borders.

When $z=4$,
problem is to max $3x+2y$ s.t. $\begin{cases} x+y \le 3 \\ x+y \le 5 \\ x+2y \le 6 \end{cases}$ 1

solving graphically, soln is $(x^* y^*) = (2,1)$ at the intersection of 1st & 2nd constraints.

(b) $z \in [0, \infty)$

For $z \le \frac{1}{2}$

$(x^*, y^*) = (\frac{1+z}{3}, \frac{1+z}{3})$ 2

and $f^*(z) = \frac{5}{3} + \frac{5}{3}z$ (max at $z = \frac{1}{2}$)

for $\frac{1}{2} < z \le 5$

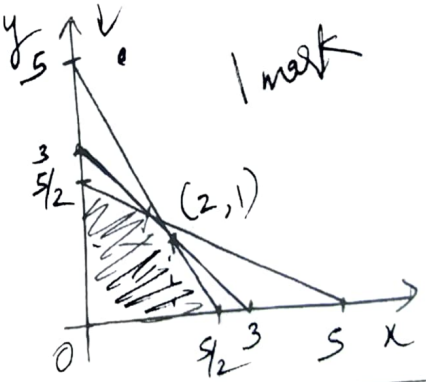
$(x^*, y^*) = (z-2, 5-z)$ 2

and $f^*(z) = z+4$ (max at $z=5$)

for $z \ge 5$, $(x^*, y^*) = (3,0)$ 2

and $f^*(z) = 9 \quad \forall z \ge 5$

(b), $z=4$



1 mark

$\Rightarrow$ Finally, optimal value f^n is

$$f^*(z) = \begin{cases} \frac{5}{3} + \frac{5}{3}z, & 0 < z \le \frac{1}{2} \\ z+4, & \frac{1}{2} < z \le 5 \\ 9, & z \ge 5. \end{cases}$$

Max^m value of objective f^n is 9 at $z \in [5, \infty)$.